



TITLE:

# 一様分布論からの話題 (函数近似の基礎理論研究会報告集)

AUTHOR(S):

鹿野, 健

---

CITATION:

鹿野, 健. 一様分布論からの話題 (函数近似の基礎理論研究会報告集). 数理解析研究所講究録 1969, 73: 11-20

ISSUE DATE:

1969-05

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/107952>

RIGHT:

## 一様分布論からの話題

信州大 理 鹿 野 健

以下の紹介は主として [19] [20] による.

### § 1. 定義と基本定理

実数列  $(x_n)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) に対し, その小数部分の列  $(\{x_n\})$ ,  $\{x_n\} = x_n - [x_n]$  を考えると, それはすべて区間

$$I: 0 \leq x < 1.$$

に含まれる.

いま,  $I$  の部分区間

$$E: a \leq x < b, \quad E \subset I.$$

を取り, この  $E$  に含まれる  $\{x_i\}$  ( $1 \leq i \leq n$ ) の個数を

$$N_n(a, b) = N_n(E) \quad \text{と表わすことにすると, もしこの}$$

ような任意の  $E$  に対して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_n(E)}{n} = b - a,$$

が成り立つとき, 数列  $(x_n)$  は一様分布する (*uniformly distributed mod 1.*) という.

また,

$$D = D(x_1, \dots, x_n) = \sup_{E \subset I} |N_n(E) - (b-a)n|$$

を  $(x_n)$  の discrepancy とよぶ。

$(x_n)$  が一様分布するための判定条件は, H. Weyl <sup>[1]</sup> によつて次の様に与えられた。

[定理 1]  $(x_n)$  が一様分布するための必要十分条件は, 同値な次の 2 つである。

(1) 任意の自然数  $k$  に対して,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n e^{2\pi i k x_j} = 0.$$

(2)  $I$  上定義された任意の Riemann 可積分函数  $f(x)$  に対して,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n f(x_j) = \int_0^1 f(x) dx.$$

以上の定義や定理はそのまま多次元の場合に拡張できる。

§ 2. Weyl の原証明は, いわば "定性的" なもので, 収束の速さ, 即ち  $D$  (あるいは  $\frac{D}{n}$ ) に対する大きさの評価は与えられていない。これに関して, Turán と Erdős [2] は次の結果を得た。

[定理 2]  $1 \leq k \leq m$  なる任意の自然数  $k$  に対して

$$\left| \sum_{j=1}^m e^{2\pi i k x_j} \right| \leq \psi(k).$$

となるならば, ある絶対定数  $C$  が存在して,

$$D(x_1, \dots, x_m) < C \left( \frac{m}{m+1} + \sum_{k=1}^m \frac{\psi(k)}{k} \right).$$

そして, 最近 LeVague [3] は次の定理を証明した。

[定理3] 任意の実数列  $(x_n)$  に対して

$$\frac{D}{n} \leq \left( \frac{6}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n e^{2\pi i k x_j} \right|^2}{k^2} \right)^{\frac{1}{3}},$$

が成り立ち, ここで右辺の指数  $\frac{1}{3}$  は best である。

一方, Van Aardenne-Ehrenfest [4] は,

[定理4] 任意の実数の無限列  $(x_n)$  に対して,

$$D(x_1, \dots, x_n) > C \frac{\log \log n}{\log \log \log n}.$$

となる  $n$  が無数に存在する。

ことを示したが, Roth [5] によってこれは

[定理5] 任意の実数の無限列  $(x_n)$  に対して,

$$D(x_1, \dots, x_n) > C \sqrt{\log n}.$$

となる  $n$  が無数に存在する, と改良された。これは [定理3]

の証明において本質的な役割を果たす。[定理5] の右辺は

$\log n$  より '大きな' 函数では置き換えられないことが知られている [4]。

一様分布する  $(x_n)$  の具体例としては,

例 1) 任意の無理数  $\alpha$  に対して,  $x_n = n\alpha$ .

(Kronecker - Borel - Weyl)

例 2) すべての素数列  $p_n$  ( $2 = p_1 < p_2 < \dots < p_n$ :  $n$  番目の素数) と任意の無理数  $\alpha$  に対して,  $x_n = p_n \alpha$ .

(Turán - Vinogradov)

例 3)  $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots$  なる任意の自然数列  $(\lambda_n)$  と, 殆んどすべての実数  $\alpha$  に対して,  $x_n = \lambda_n \alpha$ .

(Weyl)

例 4) 殆んどすべての  $\theta > 1$  に対して,  $x_n = \theta^n$ .

(Koksma)

しかし,  $(\theta^n)$  が一様分布するような具体的な  $\theta$  の値は  
何も分っていない!

Erdős - Koksma [6] と Cassels [7] によれば, 例 3  
については次の定理が成り立つ。

[定理 6]  $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots$  なる任意の  $(\lambda_n)$  と  
殆んどすべての実数  $\alpha$  に対して,  $x_n = \{\lambda_n \alpha\}$  の discre-  
pancy について,

$$D(x_1, \dots, x_n) = o\left(n^{\frac{1}{2}} (\log n)^{\frac{\varepsilon}{2} + \varepsilon}\right)$$

が 任意の  $\varepsilon > 0$  に対して成立する。

$(\lambda_n)$  が特に lacunary である場合には, 右辺はある正の定数  $\delta$  に対して,

$$o\left(n^{\frac{1}{2}}(\log \log n)^{\delta}\right)$$

となることが示されたが未発表であり, 恐らく lacunary でなくとも成り立つだろうと Endô's は述べている.

§ 3: Hincin [8] の予想として次のものがある。

『 $I$  の任意の可測部分集合  $E$  に対して, 点列  $\{\lambda_k \alpha\}$  ( $k=1, 2, \dots, n$ ) のうち  $E$  に含まれるものの個数を  $f_n(\alpha)$  と表わせば, 任意の  $E$  と殆んどすべての実数  $\alpha$  に対して,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n(\alpha)}{n} = m(E).$$

が成り立つであろう。』

これを一般化すれば次のような問題を得る。

『 $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots$  なる自然数の無限列  $(\lambda_n)$  と,

$I$  上定義された Lebesgue 可積分函数  $f(x)$  を考える。

すると,  $(\lambda_n)$  と  $f(x)$  に更にいかなる条件があれば, 殆んどすべての実数  $\alpha$  に対して

$$(A) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(\{\lambda_k \alpha\}) = \int_0^1 f(x) dx.$$

となるか? 』

Raikov [9], F. Riesz [10] によって,  $\lambda_n = a^n$  ( $a > 1$ : 自然数) については, (A) が任意の  $f \in L$  に対して成り立つ事が示された。また, その収束の速さについても, Fortet [11], Kac [12], Mukhtidinov [13], Postnikov [14] etc. の研究がある。

一オ Erdős は次のような一連の結果を得ている [15]。

[定理 7]  $\{\lambda_n\}$  が lacunary で  $f \in L^2$  のとき,  $f(x)$  の Fourier 展開の部分和を  $S_n(x)$  とすると, もし

$$(B) \quad \int_0^1 |f(x) - S_n(x)|^2 dx = O\left(\frac{1}{(\log \log n)^{2+\varepsilon}}\right),$$

ならば (A) が成立する。

[定理 8] (B) を除いてしまって無条件では (A) は成立しない。即ち, lacunary sequence  $(\lambda_n)$  と  $f \in L^p$  ( $\forall p \geq 1$ ) が存在して, 殆んどすべての  $\alpha$  に対して

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(\{\lambda_k \alpha\}) = +\infty.$$

詳しくは,  $\forall \varepsilon > 0$  に対して,

$$(c) \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n(\log \log n)^{\frac{1}{1-\varepsilon}}} \sum_{k=1}^n f(\{\lambda_k \alpha\}) = +\infty,$$

が成り立つ。

所が一方

[定理9] 任意の lacunary sequence  $\{\lambda_n\}$  と,  $f \in L^2$  について,

$$(D) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n (\log n)^{\frac{1}{2} + \varepsilon}} \sum_{k=1}^n f(\{\lambda_k \alpha\}) = 0,$$

が殆んどすべての  $\alpha$  と  $\forall \varepsilon > 0$  に対して成り立つ。

Koksma は次の結果を証明した [16]。

[定理10]  $f \in L^2$  とし, その Fourier 係数を  $(c_n)$  とする。もし

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|c_n|^2 \sum_{d|n} \frac{1}{d}) < +\infty,$$

ならば, 殆んどすべての  $\alpha$  に対して,

$$(E) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(\{k\alpha\}) = \int_0^1 f(x) dx.$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} |c_n|^2 \log \log n < +\infty$$

ならばこれは成立している。

Hinčin [17] によれば,

[定理11] 任意の無理数  $\alpha$  と  $f \in L$  に対して,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(\alpha k + \theta) = \int_0^1 f(x) dx$$

が殆んどすべての  $\theta$  について成り立つ。

これを一般化すれば次のような問題が考えられる。

『 $(x_n)$  が一様分布するとき,  $f \in L$  に対して



$$(F) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k + \theta) = \int_0^1 f(x) dx.$$

が殆んどすべての  $\theta$  について成立するための条件 ( $f$  と  $(x_n)$  に関する) は何か? 』

Salem は Erdős の方法によって, (F) の成立には何らかの条件が必要であることを示し [18], 更に次の結果を得た。

[定理 12] 任意の一様分布列  $(x_n)$  に対して,  $f \in L^2$  が周期 1 をもち,

$$\int_0^1 f(x) dx = 0,$$

であるならば,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int_0^1 \left| \sum_{k=1}^n f(t + x_k) \right|^2 dt = 0.$$

### [文 献]

- [1] H. Weyl : Math. Ann. 77 (1916) p. 313 ~ 352.
- [2] P. Turán - P. Erdős : Indag. Math. 10 (1948)  
p. 370 ~ 378 and p. 406 ~ 413.
- [3] W.J. LeVeque : Proc. of Symposia in Pure Math. vol. VIII.  
(AMS) (1965) p. 22 ~ 30.
- [4] T. van Aardenne-Ehrenfest : Indag. Math. 11 (1949)  
p. 264 ~ 269.

- [5] K. F. Roth : *Mathematika*, 1 (1954) p. 73 ~ 79.
- [6] Erdős, J. F. Koksma : *Indag. Math.* 11 (1949)  
p. 299 ~ 302.
- [7] J. W. S. Cassels : *Proc. Camb. Phil. Soc.* 46 (1950)  
p. 209 ~ 218.
- [8] A. Ya. Hinčin : *Math. Zeit.* 18 (1923), p. 289 ~ 306.
- [9] D. A. Raikov : *Mat. Sbor.* 1 (1936), p. 377 ~ 384.
- [10] F. Riesz : *Math. Helv.* 17 (1945), p. 227 ~ 239.
- [11] R. Fortet : *Studia Math.* 9 (1940), p. 54 ~ 70.
- [12] M. Kac : *Ann. of Math.* (2) 47 (1946) p. 33 ~ 49.
- [13] R. H. Muhutdinov : *Dokl. Akad.* 142 (1962) p. 36 ~ 37.
- [14] A. G. Postnikov : *Proc. Steklov Inst. Math.* no. 82  
(1966). *AMS Translation* (1967).
- [15] P. Erdős : *Trans. A.M.S.* 67 (1949) p. 51 ~ 56.
- [16] J. F. Koksma : *Bull. Soc. Math. Belg.* 6 (1953 ~ 54)  
p. 4 ~ 13.
- [17] A. Ya. Hinčin : *Recueil Math.*, Moscou 41 (1934)  
p. 11 ~ 13.
- [18] R. Salem : *Acta Sci. Math. Pzged* 12 (1950)  
p. 87 ~ 96. *Oeuvres Math.* p. 455 (Hermann) - <sup>1967</sup>.

[19] Kohama et al. : *Comp. Math.* 16 (1964) p. 1 ~ 203

[20] Zigler - Idelmberg : *Jahr. der D. M. V.* 64 (1961) p. 1 ~ 50